Просто о сложном. Подход к решению задачи №18 (проверка истинности логического выражения)

Мне представляется, что задача №18 (проверка истинности логического выражения) имеет простой и доступный каждому учащемуся алгоритм рассуждений. При моем глубочайшем уважении к деятельности Константина Полякова в его материалах, несомненно разносторонне и полно освещающих способы решения данной задачи, простота и универсальность подхода теряется за многообразием предложенныхх алгоритмов.
На своем опыте могу сказать, что многих учащихся такое разнообразие подходов отпугивает, вызывает реакцию «много букв — сложно...» и последующий отказ от усилий.
То, что я на протяжении нескольких лет предлагаю своим учащимся выглядит так: задача №18 посвящена умению описывать некоторую часть окружающего мира с помошью логического выражения. Часть выражения обычно вам дана. Сказано также и какую часть мира нужно описать. Ваша задача — восстановить неизвестную часть логического выражения.

Разберем данный подход на примерах.

Пример 1

На числовой прямой даны два отрезка: P=[4, 12], Q=[8, 15]. Выберите такой отрезок A, что логическое выражение

$$(x \notin P) \vee (x \in Q) \vee (x \notin A)$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.
1) [3, 11] 2) [12, 16] 3) [5, 13] 4) [3, 16]

1. Что представляет описываемая часть окружающего мира?

Числовую прямую, т. е. все действительные числа.

2. Какая часть числовой прямой уже описана?

а) За счет части условия ($x \notin P$) описана почти вся числовая прямая, кроме собственно отрезка P=[4, 12]

б) Условие ($x \in Q$) «спасает» некоторую часть отрезка P=[4, 12], а именно область пересечения отрезков P и Q [8, 12], таким образом описано все, кроме отрезка [4, 8] (автор умышленно вольно обращается с границами отрезков, это не влияет на общий ход решения, хотя с точки зрения математической картины мира, несомненно требует отдельного обсуждения с учащимися).

3. Как можно описать (автор обычно использует термин «спасти», для придания некоей эмоциональности объяснению) оставшуюся область в рамках заданного шаблона логического выражения?

Оставшийся неписанным отрезок [4, 8] должнем быть описан за счет условия ($x \notin A$). Значит А должен быть таким, чтобы ни дно значение x из отрезка [4, 8] в А не попадала. Смотрим варианты ответа и видим, что подходит только 2) [12, 16]

Пример 2

Обозначим через $m\&n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n. Так, например, $14\&5 = 1110_2\&0101_2 = 0100_2 = 4$.

Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула

$$x\&25 \neq 0 \rightarrow (x\&17 = 0 \rightarrow x\&A \neq 0)$$

тождественно истинна (т.е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

1. Что представляет описываемая часть окружающего мира?

Множество неотрицательных целых чисел (сразу проговариваем 0, 1, 2, 3….)

2. Какая часть множества уже описана?

Для ответа на этот вопрос хорошо упростить выражение

$$x\&25 \neq 0 \rightarrow (x\&17 = 0 \rightarrow x\&A \neq 0)$$

Используя правило замены импликации получаем

$$x\&25 = 0 \vee (x\&17 \neq 0 \vee x\&A \neq 0)$$

Т.к. операции одного уровня приоритета, скобки можно опустить

$$x\&25 = 0 \vee x\&17 \neq 0 \vee x\&A \neq 0$$

Возращаемся к вопросу

а) За счет условия $x\&25 = 0$ описаны все числа, в двоичной записи которых на тех местах, где в двоичной записи числа 25 стоят единицы, стоят нули. Т.е. числа, которые «разминулись» с числом 25, встреча их единиц не состоялась — результат встречи — нулевой. Запишем число 25 = 11001(2), значит с этим числом жают ноль в результате поразрядной конъюнкции числа вила ...00xx0(2). Здесь x и … означают любые знаки, отличие в том, что на месте … знаком может быть любое количество, в том числе и нисколько, а на месте x обязательно стоит ровно один. Эти числа описаны первым условием.

Какие числа остаются не описанными? В которых нарушается хотя бы одно требование шаблона.

Для простоты рассуждения выпишем как выглядят симла, которые не описаны первым условием: ...1xxxx(2), ...1xxx(2), ...1(2)

Таким образом первая часть условия описывает все неотрицательные целые числа, кроме чисел вида ...1xxxx(2), ...1xxx(2), ...1(2)

б) Что дает нам условие $x\&17 \neq 0$?

Это условие описывает числа, в двоичной записи которых хотя бы одна елиница стоит на месте, на котором присутствует единица в записи числа 17 (эти числа «повстречались»). Запишем число 17 в двоичной системе 17 = 10001(2). Легко заметить, что из списка неописанных первым условием чисел два шаблона (..1xxxx(2) и ...1(2)) подходят под это описание. Значит они описываются вторым условием и остается «спасти» только числа вида ...1xxx(2).

3. Как можно описать («спасти») данные числа?

За счет условия $x\&A \neq 0$. Т.е. у двоичной записи числа А единица должна «встретиться» с единицей чисел из пункта 2б: вида ...1xxx(2). Наименьшее такое А равно 1000(2) = 8.

Заметим, что данному условию также удовлеворяет бесконечное множество значений числа А (например, 11000(2), 101010(2), 1111(2) и т. д.), но наименьшее из них 1000(2).

Пример 3

Укажите наименьшее значение А, при котором выражение

$$(y+2x < A) \vee (x > 30) \vee (y > 20)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

1. Что представляет описываемая часть окружающего мира?

Множество пар целых положительных значений x и y.

2. Какая часть множества уже описана?

а) Условие (x > 30) описывает все пары, в которых x больше 30, значит остаются неописанными пары, в которых x принимает значения от 1 до 30 включительно.

б) Условие (y > 20) «спасает» те пары, в которых y больше 20, значит остаются неописанными пары, в которых x принимает значения от 1 до 30 включительно, а y — от 1 до 20 включительно.

3. Как можно описать такие пары в рамках заданного шаблона логического выражения?

С помощью условия (y+2x < A) нужно описать все возможные значения x и y. Очевидно, что «нужно позаботиться» о максимальных возможных значениях x и y. Это x=30 и y=20.

20+2*30 = 80. Наименьшее значение А, удовлетворяющее условию 80< А равно 81.

Пример 4

Обозначим через **ДЕЛ**(*n, m*) утверждение «натуральное число *n* делится без остатка на натуральное число *m*».

Для какого наибольшего натурального числа *A* формула

$$\neg\text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 8) \rightarrow \neg\text{ДЕЛ}(x, 6))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной *x*)?

1. Что представляет описываемая часть окружающего мира?

Множество натуральных чисел (1, 2, 3…)

2. Какая часть множества уже описана?

Чтобы ответить на этот вопрос упростим выражение, заменяя импликацию и убирая скобки:

$$\text{ДЕЛ}(x, A) \vee \neg\text{ДЕЛ}(x, 8) \vee \neg\text{ДЕЛ}(x, 6))$$

а) Условие ¬**ДЕЛ**(*x*, 8) описывает числа, которые НЕ делятся на 8 — это все натуральные числа, кроме чисел вида 8x, где x — натуральный множитель (8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64 и т. д. - на самом деле, очень полезно приводить примеры в процессе тренировки решения).

б) Условие ¬**ДЕЛ**(*x*, 6) описывает числа, которые НЕ делятся на 6 — это все натуральные числа, кроме чисел вида 6y, где y — натуральный множитель (6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48 и т. д.). нетрудно заметить, что списки «проблемных» (неописываемых условием) чисел для этих двух условий пересекаются в «дважды проблемных» числах 24 и 48, остальные же числа лазываются «спасены» (например, число 8, не удовлетвряет условию ¬**ДЕЛ**(*x*, 8), зато удовлетворяет условию ¬**ДЕЛ**(*x*, 6) и т. д.).

В этом месте даже самые большие нелюбители понятий НОД, НОК и прочих важных объектов математики замечают, что проблема возникает, когда число делится и на 6, и на 8, а таковыми очевидным образом являются числа вида 24n, где n — натуральный множитель.

3. Как можно описать такие числа в рамках заданного шаблона логического выражения?

Нам осталось условие **ДЕЛ**(*x, A*), т. е. все числа 24n, где n — натуральный множитель, должны делиться на А. Очевидно, что наибольшее А=24.

Итак, подведем итоги. Не вызывает сомнения, что для учащихся, обладающих выраженным аналитическим мышлением, явной учебной мотивацией и хорошей математической базой, данный подход просто не нужен, потому что для них решение задачи 18 является простым и очевидным. К сожалению, перед многими учителями информатики стоит задача обучить решению различных вариантов задач в рамках веьма ограниченного временного ресурса учащихся с невыраженной мотивацей и т. п. Для таких случаев приведенная в статье методика может оказаться полезной. Для учащихся с выраженной мотивацией и т. д. данный подход может послужить примером обобщения, которым им полезно овладеть для оптимизации дальнейшего процесса обучения.