Билет №15

Определение

- *Многоугольник называется правильным, если у него все стороны равны и углы равны.*

Примеры:

- Пятиугольник
- Шестиугольник
- Семиугольник
- Восьмиугольник

Теорема о вписанной и описанной окружности

- *В каждом правильном многоугольнике есть точка, равноудаленная от всех его вершин и от всех его сторон.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Соотношения в правильном многоугольнике

I. Соотношение стороны и радиуса описан

II. Соотношение радиусов вписанной и опи

III. Свойство периметров правильных много

Соотношение стороны и радиуса описанной окружности

- Сторона a_n правильного n-угольника связана с радиусом R описанной около него окружности формулой

$$a_n = 2R \cdot \sin \frac{180^0}{n}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Соотношение радиусов вписанной и описанной окружности

- Радиус r вписанной окружности в правильный n-угольник можно найти через радиус R описанной окружности около этого же n-угольника по формуле

$$r = R \cdot \cos \frac{180^0}{n}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

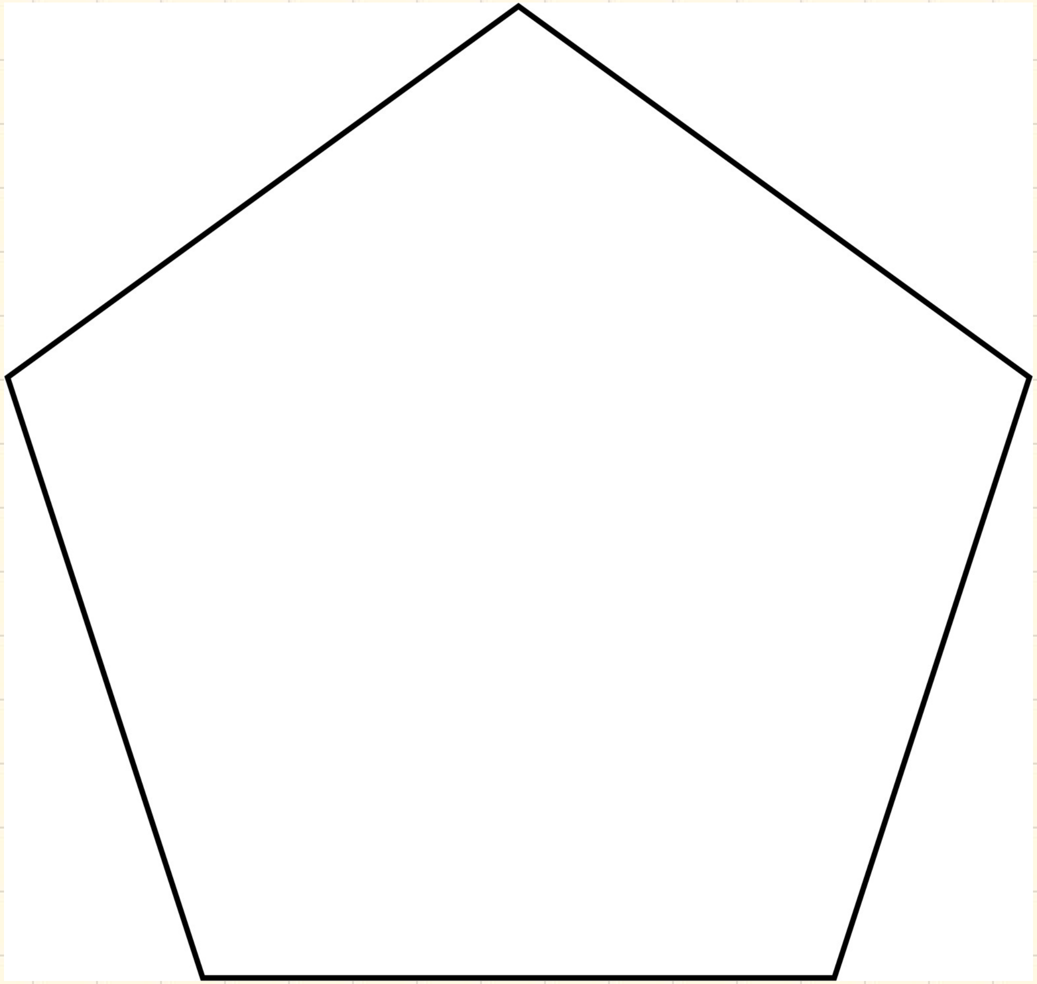
Свойство периметров правильных многоугольников

- Периметры P_1 и P_2 правильных n-угольников относятся как радиусы R_1 и R_2 описанных около них окружностей

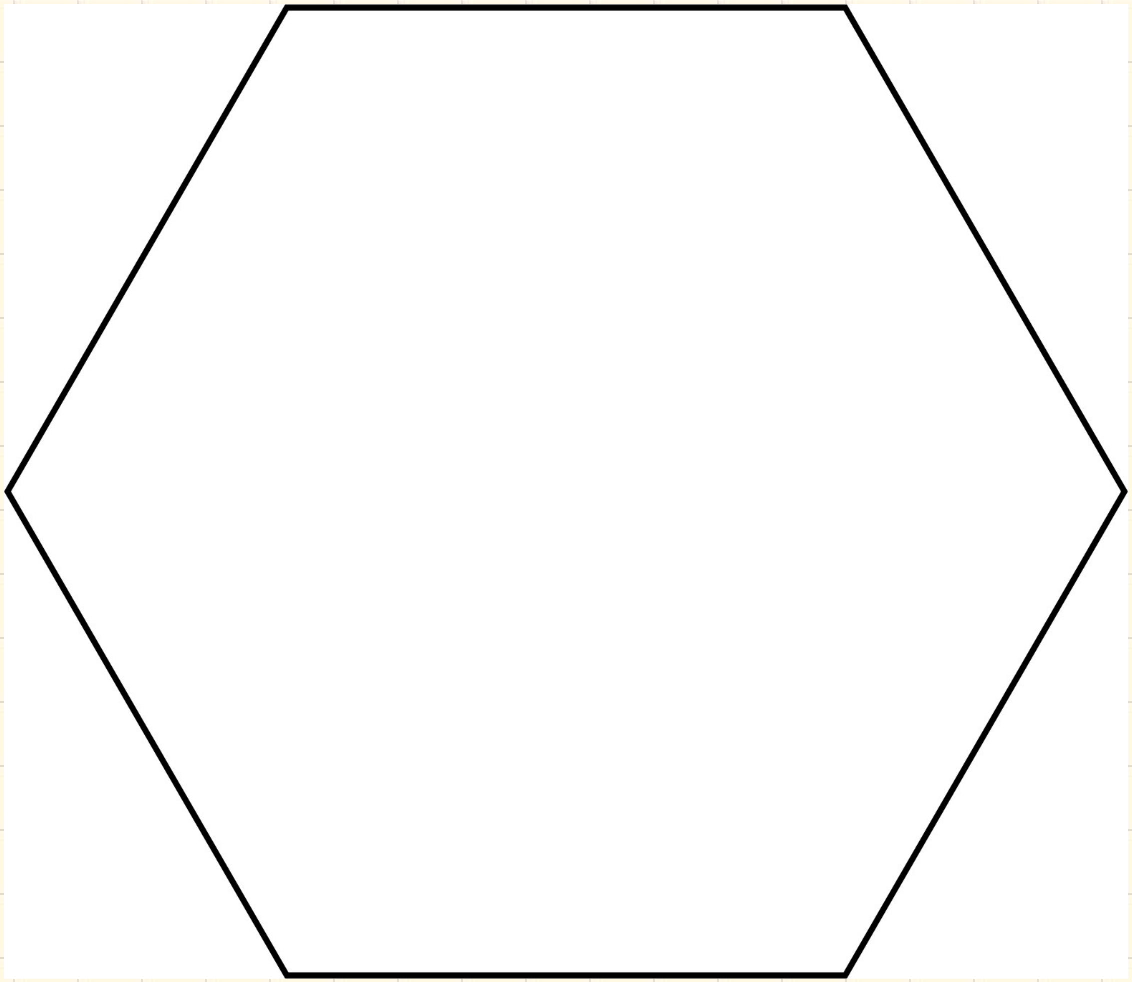
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пятиугольник

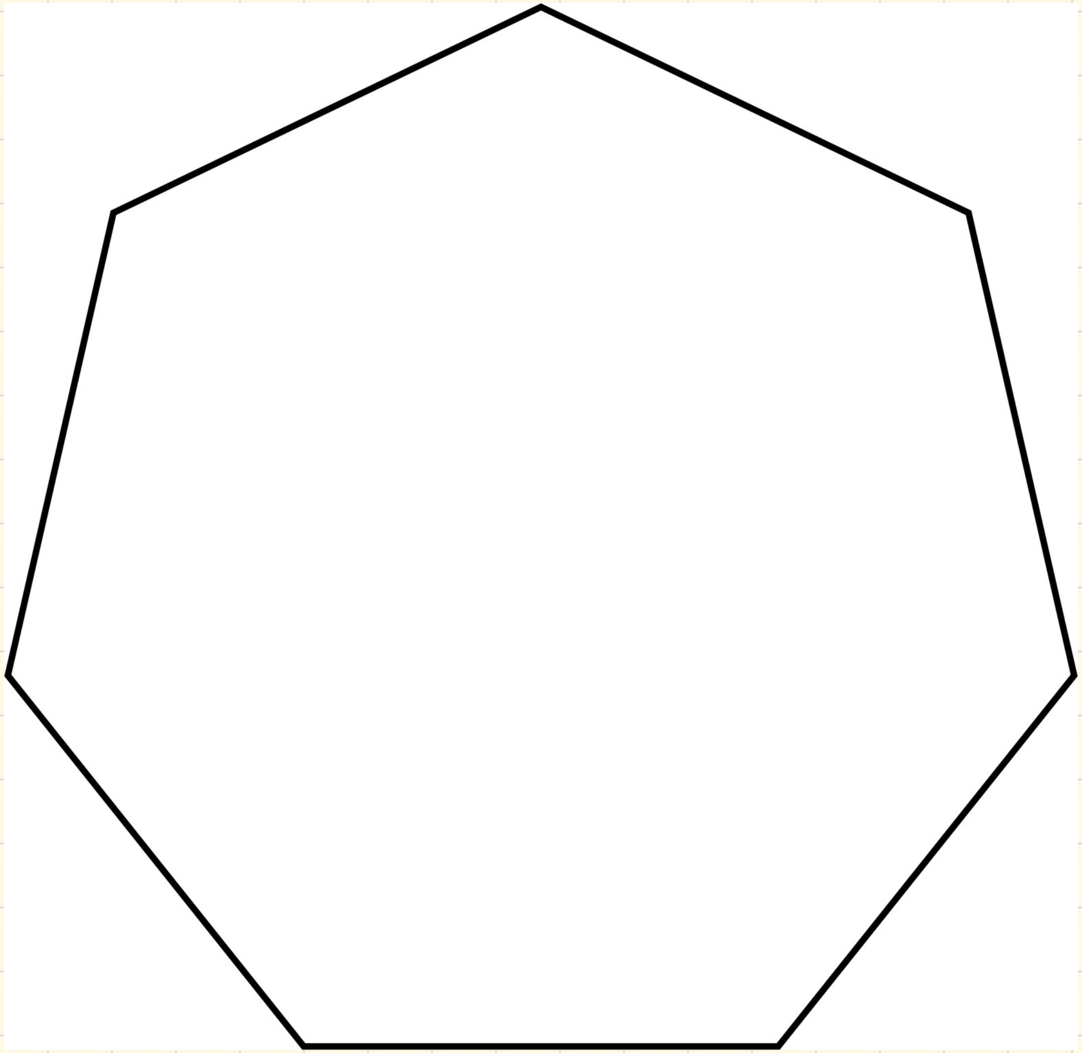


Шестиугольник

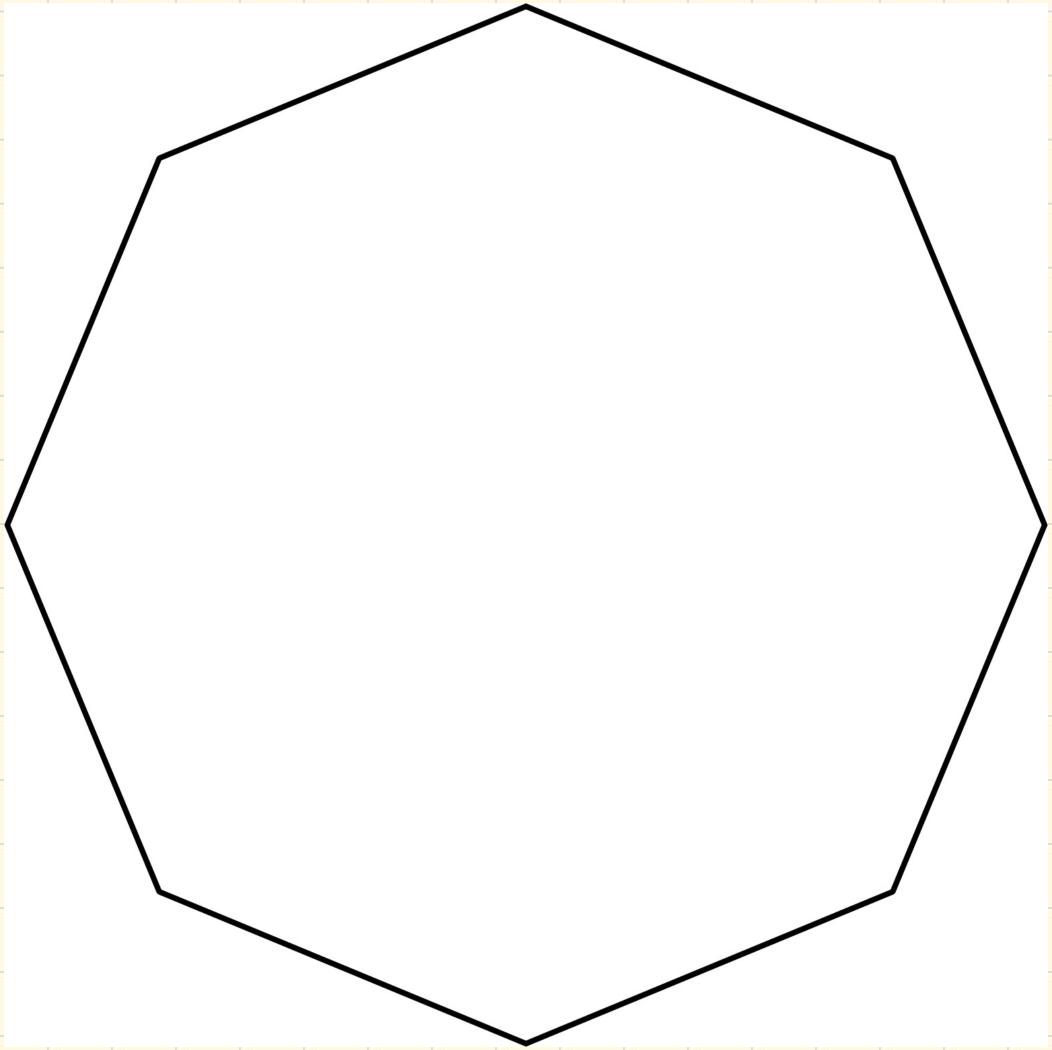


Обратно

Семиугольник

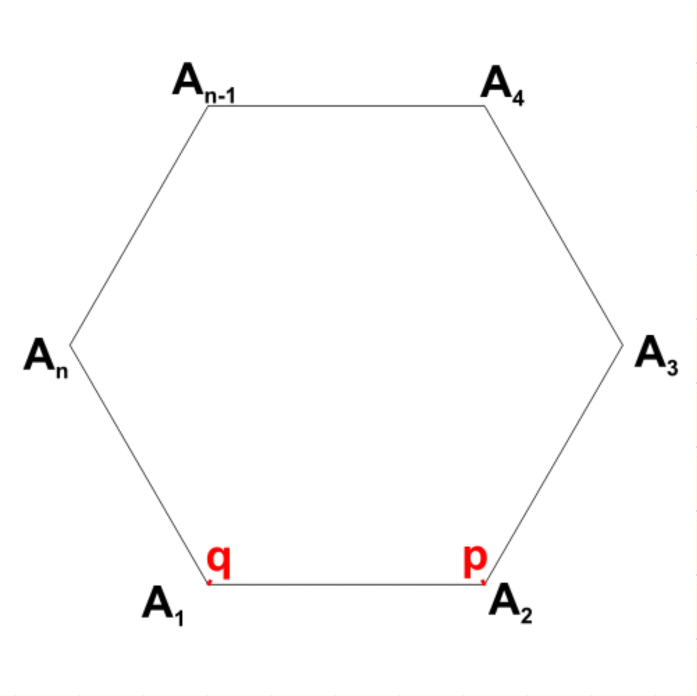


Восьмиугольник



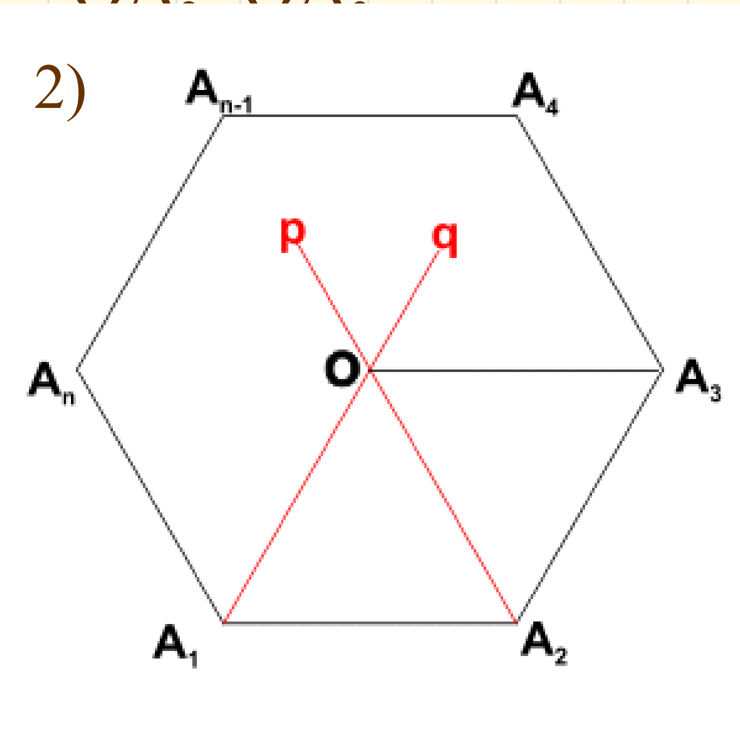
Доказательство

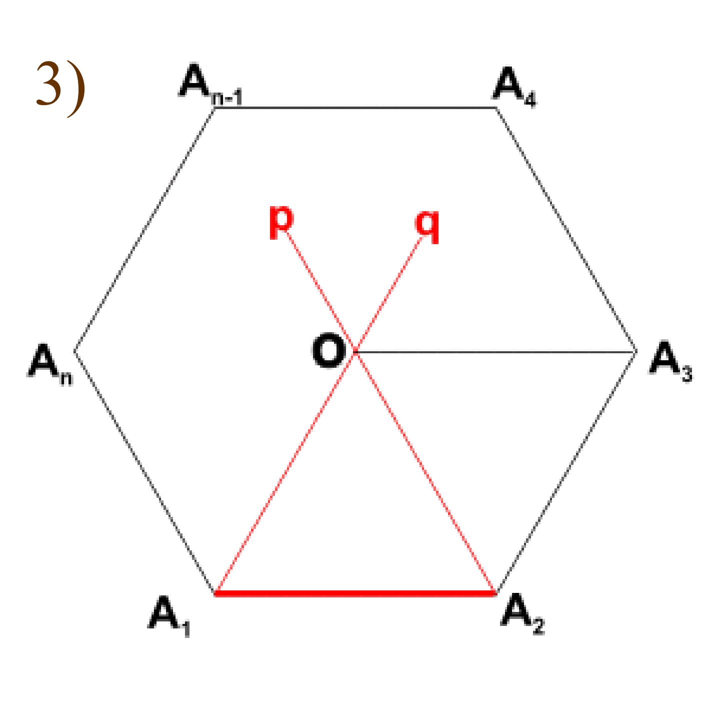
1) Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ – правильный n-угольник. Проведем биссектрисы p и q углов A_1 и A_2, пересекающиеся в некоторой точке O.



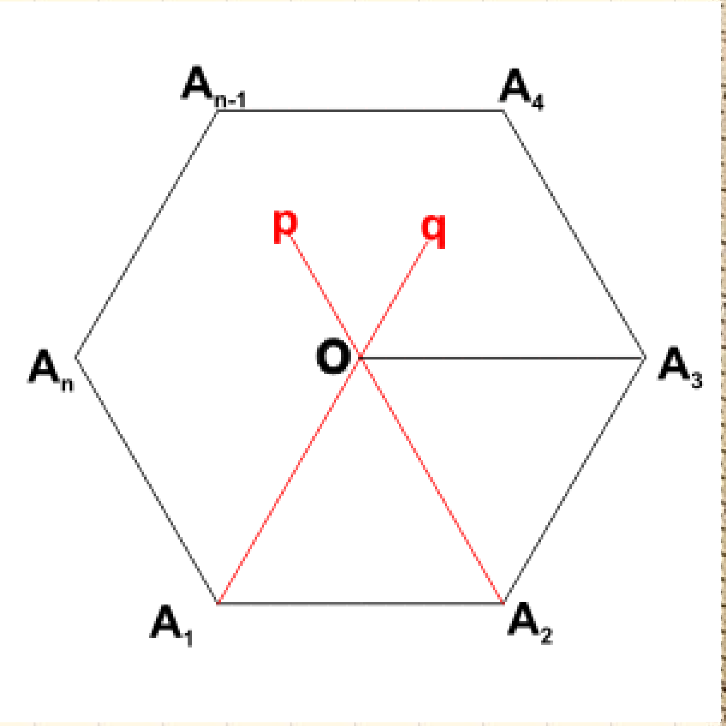
2) Угол 1 равен Углу 2 ⇨ $\triangle OA_1A_2$ – равнобедренный ⇨$OA_1=OA_2$.

3) $A_1A_2=A_2A_3$, OA_2 – общая, Угол 2 равен Углу 3 (A_2O – биссектриса) ⇨ $\triangle OA_1A_2$ равен $\triangle OA_2A_3$ ⇨ $OA_1=OA_3$, Угол 3 равен Углу 4, $OA_2=OA_4$.

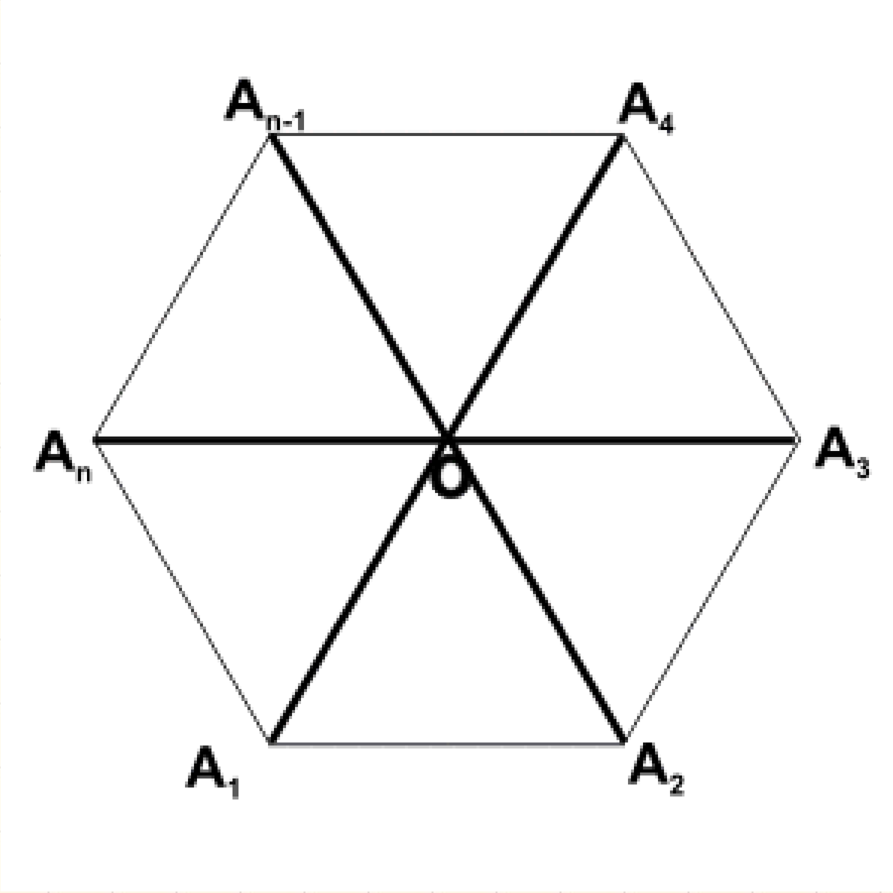




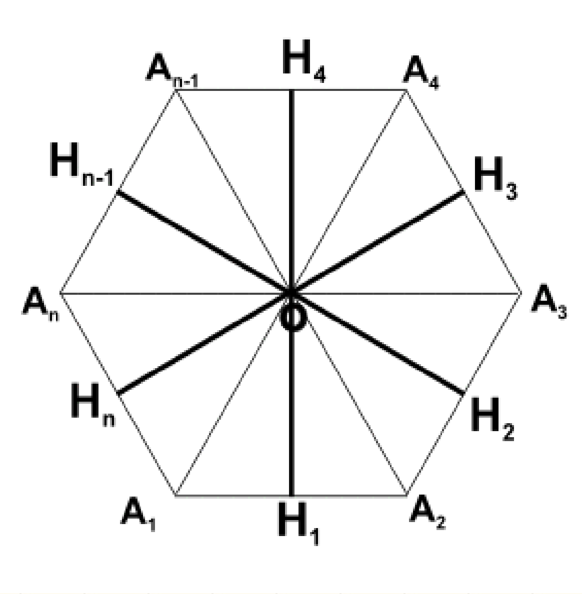
4) Угол 3 равен половине Угла A_2, Угол A_2 равен углу A_3 ⇨ Угол 3 равен половине Угла A_3. Также Угол 3 равен Углу 4 ⇨ Угол 4 равен половине Угла A_3 ⇨ Угол 4 равен Углу 5 ⇨ A_3O – биссектриса Угла A_3.



5) Аналогично $OA_3=OA_4=OA_5=\ldots=OA_n$ ⇨ точка O равноудалена от всех вершин многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$



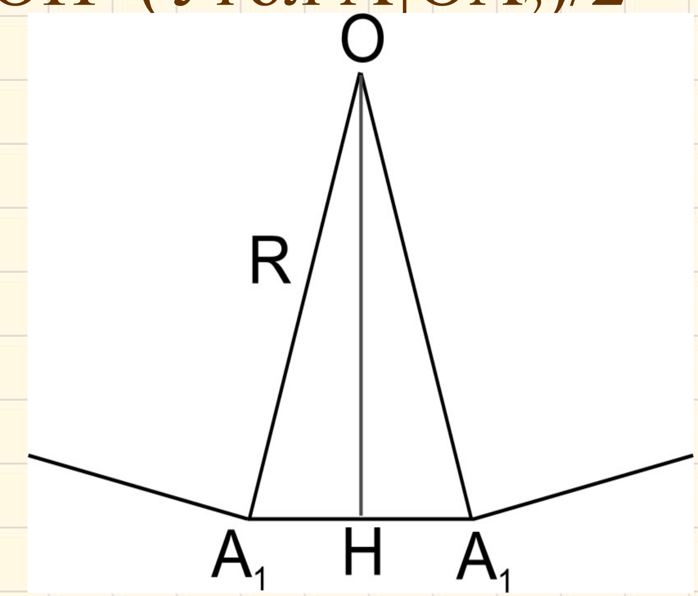
6) Так как $OA_1=OA_2=OA_3=\ldots=OA_n$, n-угольник правильный ⇨ $\triangle OA_1A_2 =\triangle OA_2A_3=\ldots= \triangle OA_{n-1}A_n$ ⇨ $OH_1=OH_2=\ldots =OH_n$ – высоты этих треугольников ⇨ точка O равноудалена от всех сторон многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$



Обратно

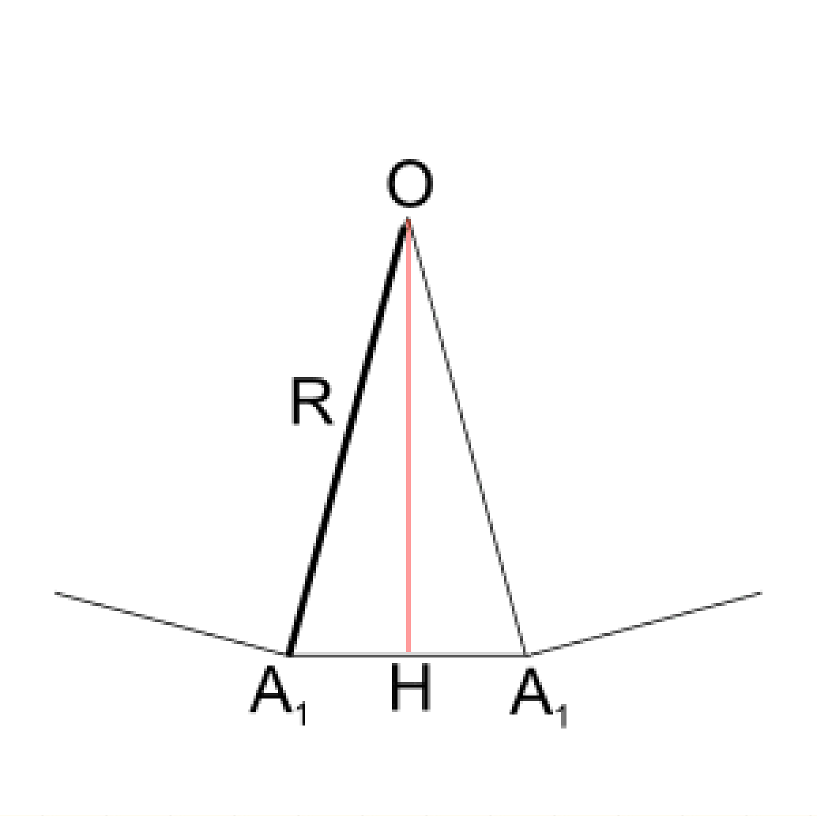
Доказательство

1. Пусть A_1A_2 – сторона правильного n-угольника, а точка O – его центр. Тогда $OA_1=R$ и OH – высота равнобедренного треугольника OA_1A_2. Угол $A_1OA_2=360°/n$ ⇨ Угол $A_1OH=(\text{Угол } A_1OA_2)/2= 180°/n$



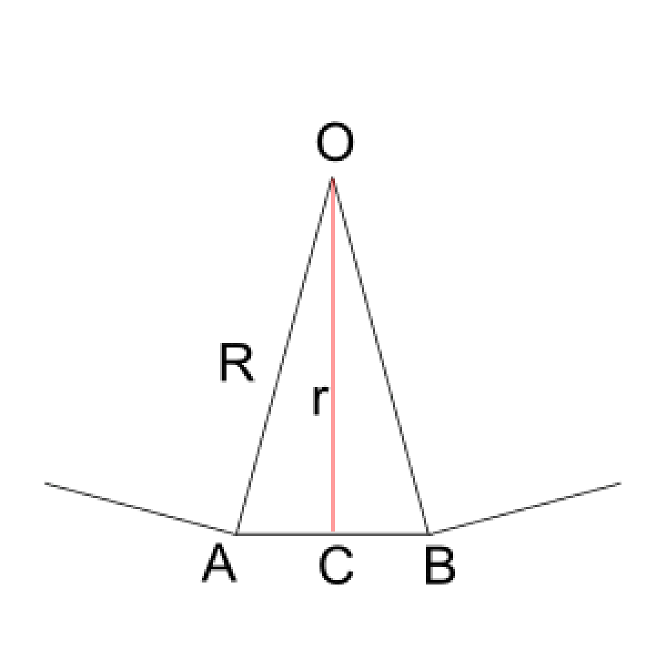
2. Рассмотрим прямоугольный треугольник A_1OH: sin Угла $A_1OH=A_1K/OA_1=a_nR/2$ ⇨ an/2= R sin 180 ° /n, откуда получаем, что

$$a_n = 2R \cdot \sin \frac{180^0}{n}$$



Доказательство

- Пусть AB – сторона n-угольника, Точка O – его центр, OC – высота △AOB. Рассмотрим △ACO. Cos Угла O=r/R ⇨ r=R cos Угла O. Так как Угол AOB=360 ° /n, то Угол AOC=180 ° /n, поэтому



$$r = R \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$$

Доказательство

- Пусть a_1 и a_2 – стороны двух правильных n-угольников. Тогда $P1=a_1*n$, $P2=a_2*n$, $a_1=2R_1*$ $\sin(180°/n)$ и $a_2=2R_2 \sin(180°/n)$. Составим отношение:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1 \cdot \sin(180^0/n)}{R_2 \cdot \sin(180^0/n)} = \frac{R_1}{R_2}$$