

Билет №10



Теорема косинусов

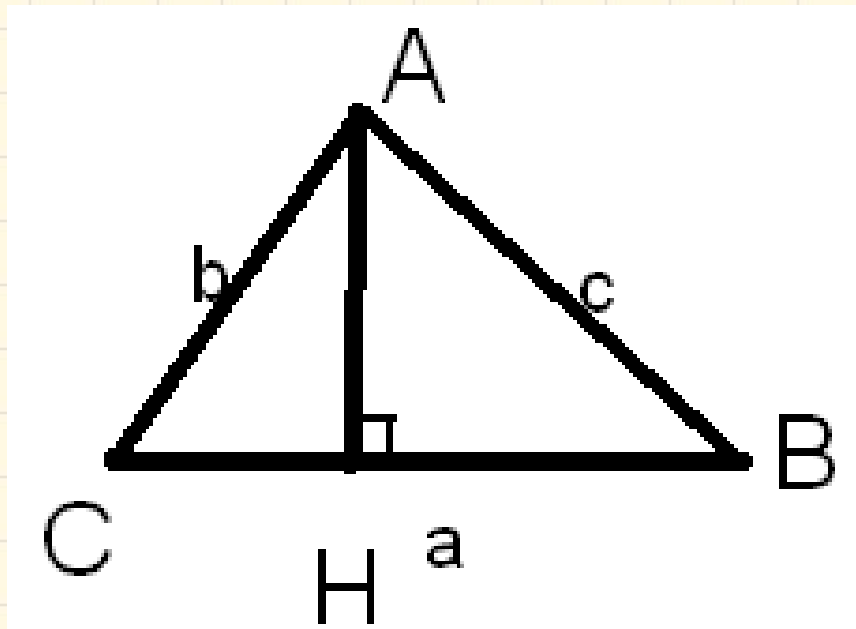
Теорема: Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих же сторон на косинус угла между ними.

Доказать:

$$\text{I } c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \angle C$$

$$\text{II } b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \angle B$$

$$\text{III } a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \angle A$$



Доказательство: I, II

I $\angle C = 90^\circ \Rightarrow \cos \angle C = 0 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$ (по теореме Пифагора)

II $\angle C < 90^\circ$ - острый

1) Рассмотрим тр. АНС – п/у

$$\cos \angle C = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC * \cos \angle C = b * \cos \angle C$$

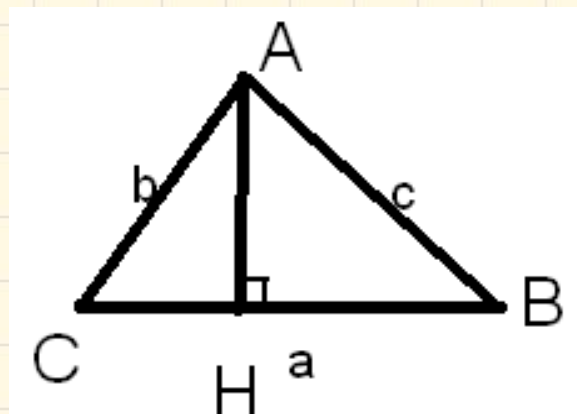
2) По теореме Пифагора:

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = b^2 - b^2 * \cos^2 \angle C$$

3) тр. СНВ – п/у

По теореме Пифагора.

$$c^2 = AH^2 + HB^2 = b^2 - b^2 * \cos^2 \angle C + (CB - CH)^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos \angle C$$



Доказательство: III

III $\angle C > 90^\circ$

1) Рассмотрим тр. АНС – п/у

$$\cos \angle АСН = НС / АС \Rightarrow НС = АС * \cos \angle АСН = -b * \cos \angle АСН$$

2) Рассмотрим тр. АНС – п/у

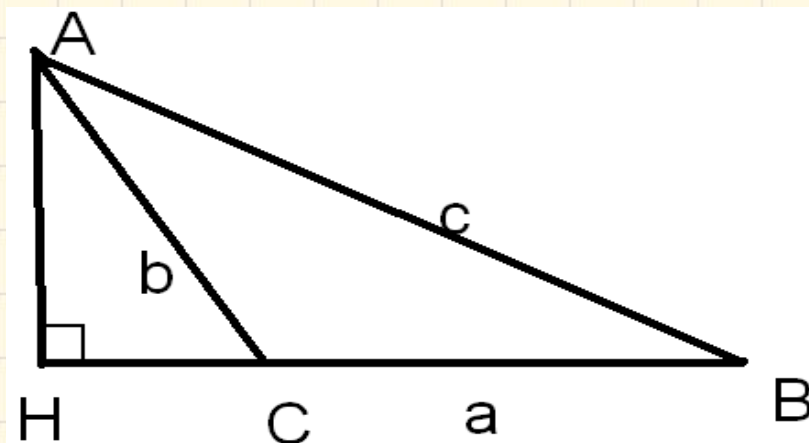
по теореме Пифагора:

$$АН^2 = АС^2 + НС^2 = b^2 - b^2 * \cos^2 \angle C$$

3) Рассмотрим тр. АНВ – п/у

по теореме Пифагора

$$С^2 = АН^2 + НВ^2 = b^2 - b^2 * \cos^2 \angle C + (НС + СВ)^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos \angle C$$



Свойство диагоналей параллелограмма

Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов других сторон этого параллелограмма.

Дано: ABCD – параллелограмм, AB и CD – диагонали.

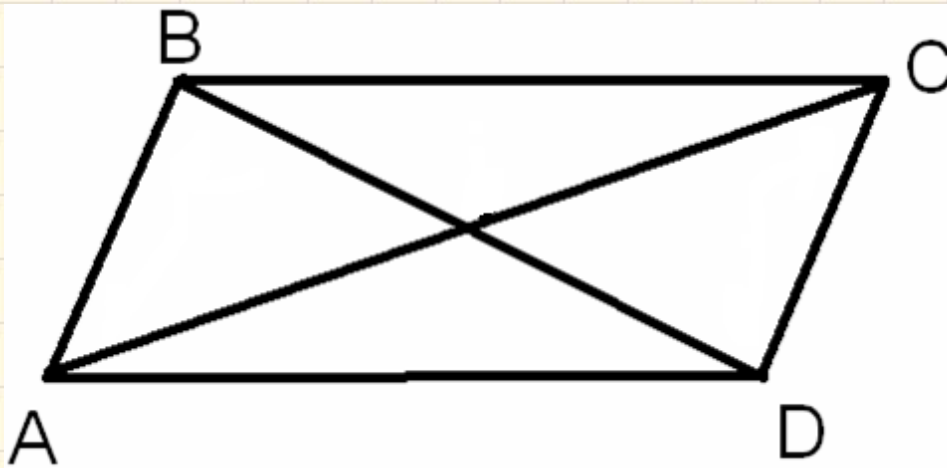
Доказать: $BD^2 + AC^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2$

Доказательство:

1) Рассмотрим тр. ABC: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B$

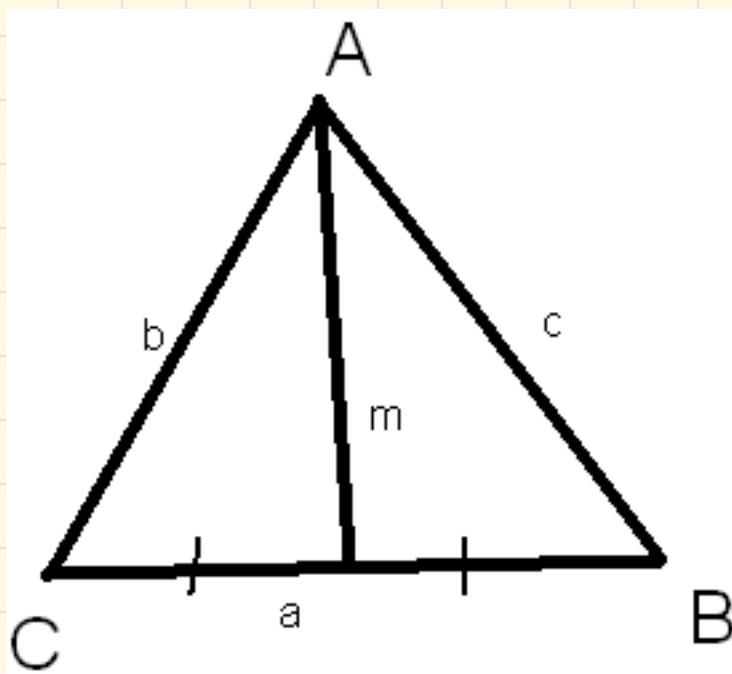
2) Рассмотрим тр. BCD: $BD^2 = CD^2 + BC^2 + 2 \cdot CD \cdot BC \cdot \cos \angle C$

3) $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B + CD^2 + BC^2 + 2 \cdot CD \cdot BC \cdot \cos \angle C = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B + CD^2 + DA^2 + 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2$



Формула медианы треугольника

$$m(a) = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

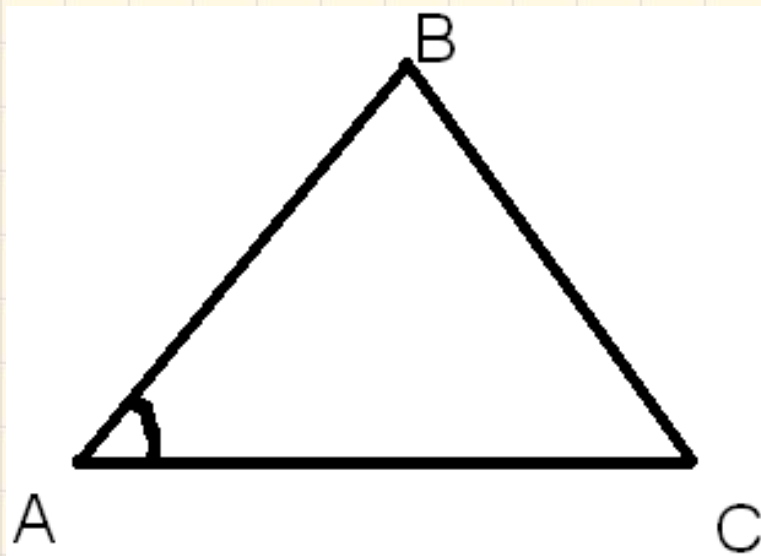


1) Определение вида треугольников (по углам)

Остроугольный ($\angle A < 90^\circ$)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos \angle A$$

$\cos \angle A = (b^2 + c^2 - a^2) / 2 * b * c$, $\cos \angle A > 0 \Rightarrow \Rightarrow \triangle ABC$ -
o/y

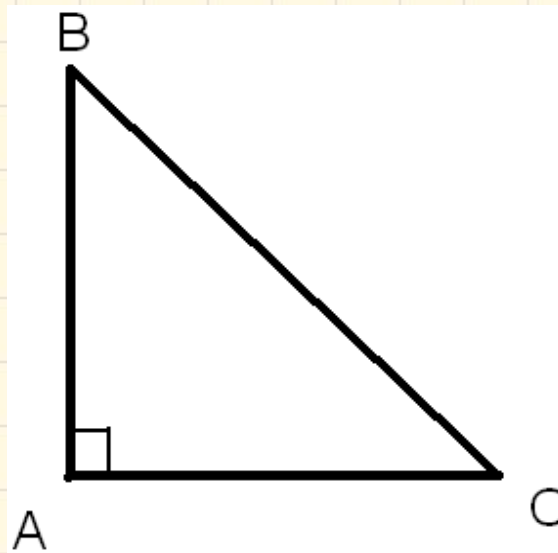


2) Определение вида треугольников (по углам)

Прямоугольный ($\angle A = 90^\circ$)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \text{Cos} \angle A$$

$\text{Cos} \angle A = (b^2 + c^2 - a^2) / 2 * b * c$, $\text{Cos} \angle A = 0 \Rightarrow \Rightarrow \Delta ABC$ -
п/у



3) Определение вида треугольников (по углам)

Тупоугольный ($\angle A > 90^\circ$)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \text{Cos} \angle A$$

$$\text{Cos} \angle A = (b^2 + c^2 - a^2) / 2 * b * c, \text{Cos} \angle A < 0 \Rightarrow \Rightarrow \Delta ABC - \text{т/у}$$

